

Правильные многогранники



**«Правильных многогранников вызывающе мало,
но этот весьма скромный по численности отряд
сумел пробиться в самые глубины различных наук»**

Льюис Кэрролл

**Правильные многогранники являются
удивительным символом симметрии,
привлекавшим внимание выдающихся мыслителей,
ведь их форма – образец совершенства. Этим и
объясняется интерес человека к многогранникам.**

Многогранник называется правильным, если все его грани - равные правильные многоугольники.

К каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число рёбер.

Сумма плоских углов при вершине правильных многогранников не больше пяти. Все двугранные углы при рёбрах и все многогранные углы при вершинах правильного многогранника равны.

Доказано, что правильных многогранников только 5 типов:

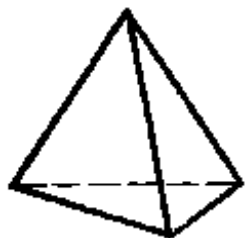
четырёхгранник (тетраэдр),

шестигранник или куб (гексаэдр),

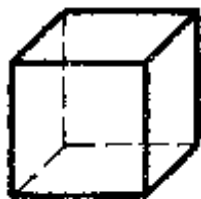
восьмигранник (октаэдр),

двенадцатигранник (додекаэдр),

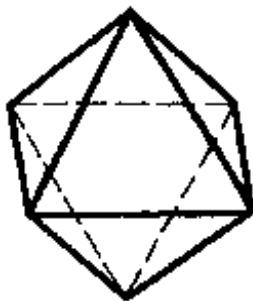
двадцатигранник (икосаэдр).



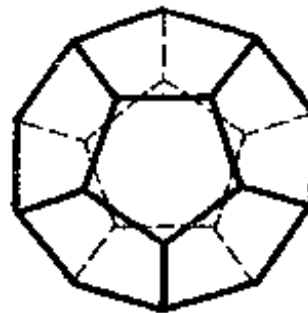
Тетраэдр



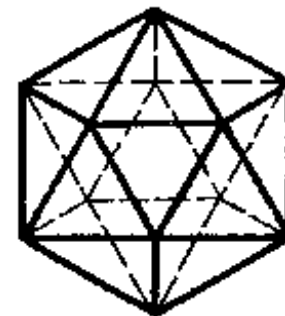
Куб



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

Тетраэдр



"тетра" - 4

Гексаэдр



"гекса" - 6

Октаэдр



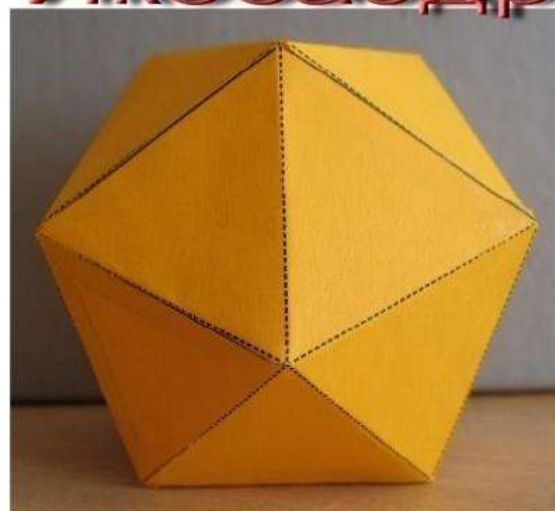
"окта" - 8

Додекаэдр



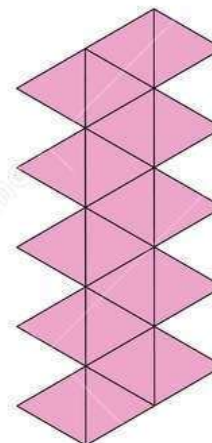
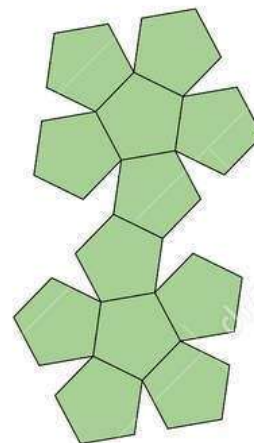
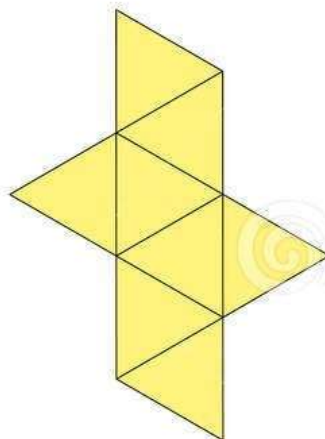
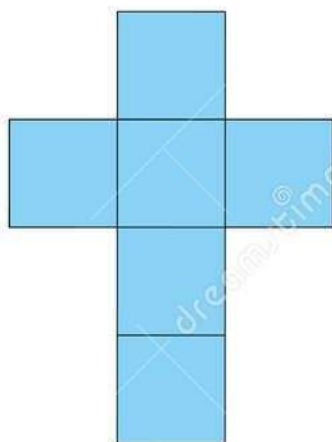
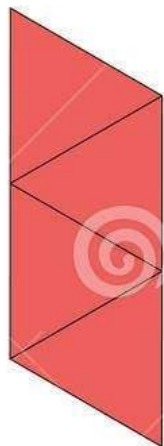
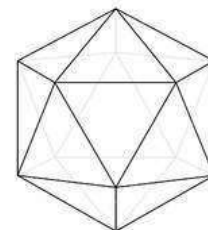
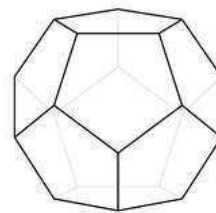
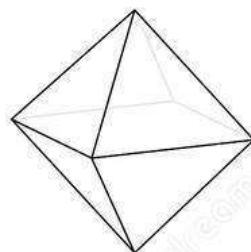
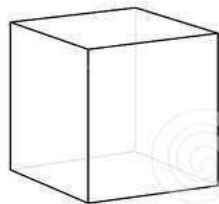
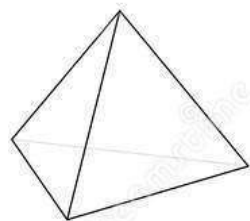
"додека" - 12

Икосаэдр



"икоса" - 20

Развёртки правильных многогранников



История правильных многогранников

- Их изучали ученые, ювелиры, священники, архитекторы. Этим многогранникам даже приписывали магические свойства. Древнегреческий ученый и философ Платон (IV–V в до н. э.) считал, что эти тела олицетворяют сущность природы. В своем диалоге «Тимей» Платон говорит, что атом огня имеет вид тетраэдра, земли – гексаэдра (куба), воздуха – октаэдра, воды – икосаэдра. В этом соответствии не нашлось места только додекаэдру и Платон предположил существование еще одной, пятой сущности – эфира, атомы которого как раз и имеют форму додекаэдра. Ученики Платона продолжили его дело в изучении перечисленных тел. Поэтому эти многогранники называют **платоновыми телами**.



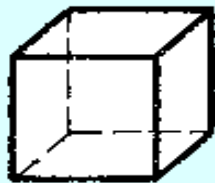
Платон -философ –идеалист (428– 348 гг. до н.э.)

- Платоновы тела - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников. Однако между двумерным и трёхмерным случаями есть важное отличие: существует бесконечно много различных правильных многоугольников, но лишь пять различных правильных многогранников. Других типов правильных многогранников не существует.

- Платоновыми телами называются *правильные однородные выпуклые многогранники*, то есть выпуклые многогранники, все грани и углы которых равны, причем грани - правильные многоугольники.
- Платоновы тела - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников. Однако между двумерным и трехмерным случаями есть важное отличие: существует бесконечно много различных правильных многоугольников, но лишь пять различных правильных многогранников.
- Доказательство этого факта известно уже более двух тысяч лет (**Евклид доказал этот факт ещё в 3 веке до н.э.**); этим доказательством и изучением пяти правильных тел завершаются "Начала" Евклида. Им посвящена заключительная, XII книга знаменитых начал Евклида.



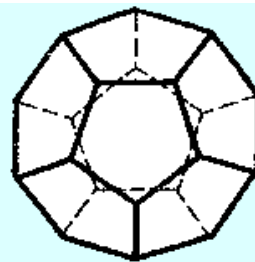
Тетраэдр



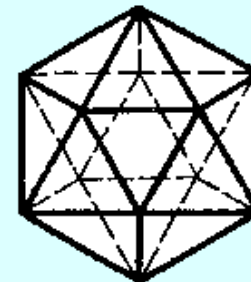
Куб



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

В идеалистической картине мира, данной древнегреческим мыслителем Платоном, четыре из них олицетворяли четыре стихии: тетраэдр-огонь, куб-земля, октаэдр-воздух, икосаэдр-вода, додекаэдр-все мироздание, его по латыни стали называть *quinta essentia* («пятая сущность»).

При этом частицы трёх стихий, которые легко превращаются друг в друга – огонь, воздух и вода – оказываются составленными из одинаковых треугольников. А земля, существенно отличающаяся от них, состоит из кубов – частиц совсем другого вида.

Пятый же многогранник, додекаэдр, воплощал в себе «всё сущее», символизировал всё мироздание, почитался главнейшим. Уже по латыни в средние века его стали называть «пятая сущность» или *quinta essentia*, «квинта эссенция», отсюда происходит вполне современное слово «квинт-эссенция», означающее всё самое главное, основное, истинную сущность чего-либо.

Платоновы тела



Огонь



Земля



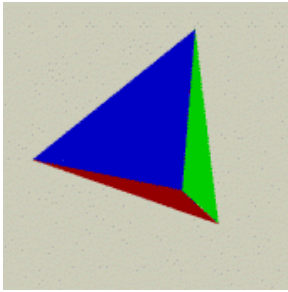
quinta essentia



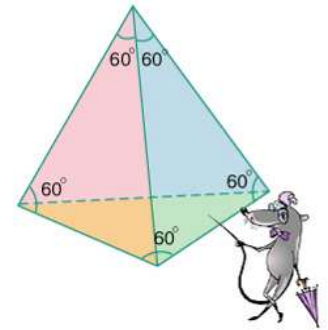
Вода



Воздух



Тетраэдр



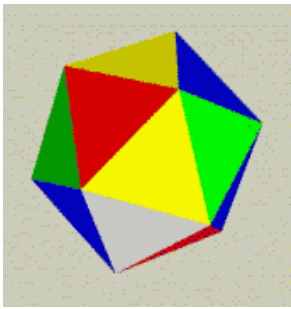
- **Тетраэдр** (tetra – четыре, hedra – грань). Правильный тетраэдр – правильный четырехгранник, то есть тетраэдр с равными ребрами, представляет собой правильный многогранник, все грани которого – правильные треугольники и из каждой вершины которого выходит ровно три ребра
- У него 4 вершины, 4 грани, 6 ребер
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180 градусов

Радиус описанной сферы: $R = \frac{a}{4} \sqrt{6}$

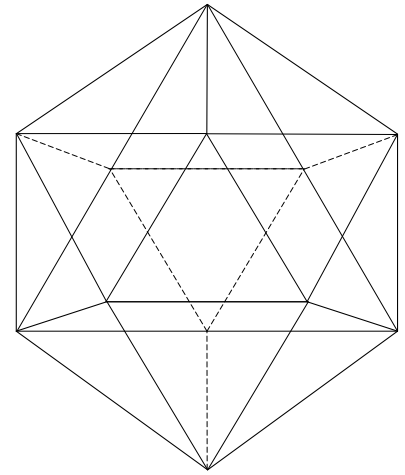
Радиус вписанной сферы: $r = \frac{a}{12} \sqrt{6}$

Площадь поверхности: $S = a^2 \sqrt{3}$

Объем тетраэдра: $V = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}$



Икосаэдр



- *(состоит из 20 треугольников)*
- *В каждой вершине икосаэдра сходятся пять граней.*
- *Существует правильный многогранник, у которого все грани – правильные треугольники, и из каждой вершины выходит 5 ребер. Этот многогранник имеет 20 граней, 30 ребер, 12 вершин и называется икосаэдром (icosi – двадцать).*
- *Сумма плоских углов при каждой вершине равна 300 градусов.*

Радиус описанной сферы:

$$R = \frac{a}{4} \sqrt{2(5 + \sqrt{5})}$$

Радиус вписанной сферы:

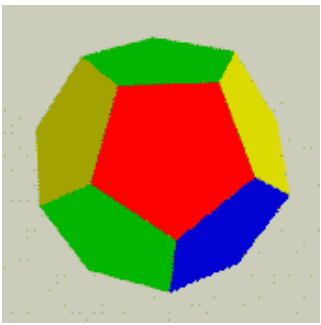
$$r = \frac{a}{4\sqrt{3}} (3 + \sqrt{5})$$

Площадь поверхности:

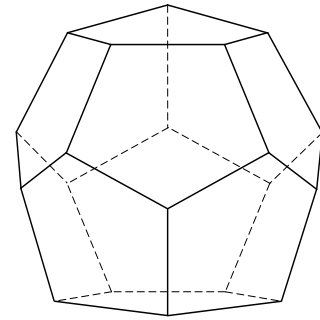
$$S = 5a^2 \sqrt{3}$$

Объем икосаэдра:

$$V = \frac{5a^3}{12} (3 + \sqrt{5})$$



Додекаэдр



- Существует правильный многогранник, у которого все грани правильные пятиугольники и из каждой вершины выходит 3 ребра. Этот многогранник имеет 12 граней, 30 ребер и 20 вершин и называется **додекаэдром** (dodeka – двенадцать).
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 324 градуса

Радиус описанной сферы:

$$R = \frac{a}{4} (1 + \sqrt{5}) \sqrt{3}$$

Радиус вписанной сферы:

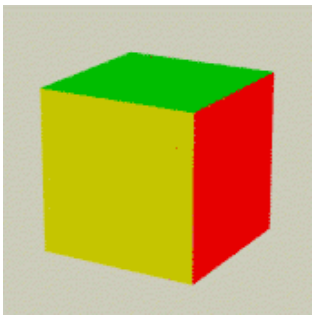
$$r = \frac{a}{4} \sqrt{10 + \frac{22}{\sqrt{5}}}$$

Площадь поверхности:

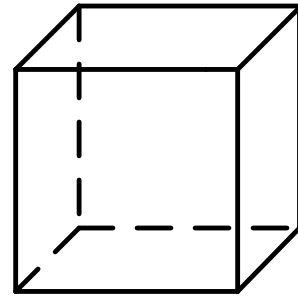
$$S = 3a^2 \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$

Объем додекаэдра:

$$V = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5})$$



Гексаэдр (куб)



- **Гексаэдр (куб, гекса – шесть).** Гексаэдр – правильный многогранник, все грани которого – квадраты, и из каждой вершины выходит три ребра.
- У него 6 граней, 8 вершин, 12 ребер
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270 градусов

Радиус описанной сферы:

$$R = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

Радиус вписанной сферы:

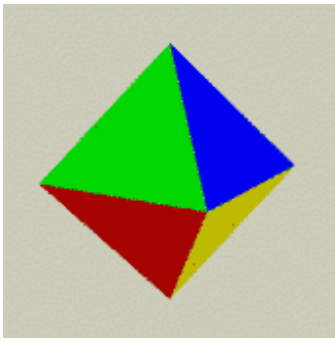
$$r = \frac{a}{2}$$

Площадь поверхности куба:

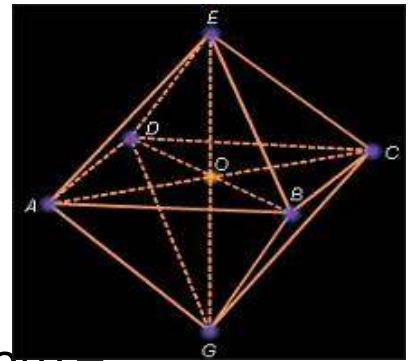
$$S = 6a^2$$

Объем куба:

$$V = a^3$$



Октаэдр



- **Октаэдр** - это правильный многогранник, все грани которого - правильные треугольники и к каждой вершине прилегают четыре грани.
- У него 8 граней, 12 ребер, 6 вершин.

Радиус описанной сферы:

$$R = \frac{a}{2} \sqrt{2}$$

Радиус вписанной сферы:

$$r = \frac{a}{6} \sqrt{6}$$


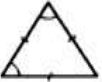
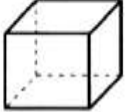
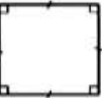

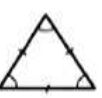

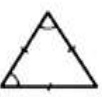


Площадь поверхности:

$$S = 2a^2 \sqrt{3}$$

Объем октаэдра:

$$V = \frac{a^3}{3} \sqrt{2}$$

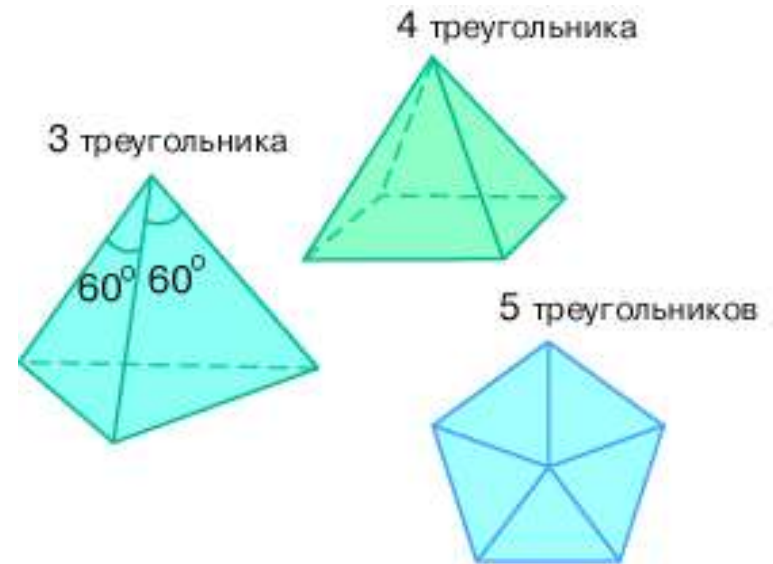
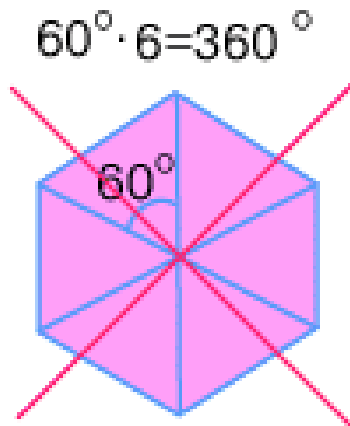
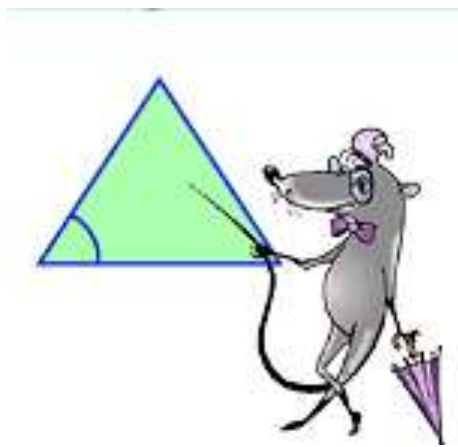
Теорема Эйлера

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ					
№	Тип правильного многогранника	Вид грани	Число граней	Число вершин	Число ребер
1	Правильный тетраэдр (четырёхгранник) 		4	4	6
2	Гексаэдр (шестигранник), куб 		6	8	12
3	Октаэдр (восьмигранник) 		8	6	12
4	Икосаэдр (двадцатигранник) 		20	12	30
5	Додекаэдр (двенадцатигранник) 		12	20	30

Тела Платона	В	Р	Г
Тетраэдр	4	6	4
Куб	8	12	6
Октаэдр	6	12	8
Додекаэдр	20	30	12
Икосаэдр	12	30	20

Эйлер обнаружил удивительную закономерность, что если V - число вершин, P - число ребер, G - число граней, то $V - P + G = 2$

- Сколько существует «типов» правильных многогранников? Выяснится, что возможностей всего пять. Число k многоугольников, прилежащих к одной вершине, должно быть не меньше трёх, однако таким, чтобы сумма углов, прилежащих к одной вершине, была меньше 360° , иначе никакой многогранный угол из этих треугольников составить не удастся.
- Углы правильного треугольника равны 60° , и условие $k \cdot 60^\circ < 360^\circ$ даёт неравенство $k < 6$, поэтому число треугольников, сходящихся в каждой вершине правильного многогранника, может быть равно только 3, 4 или 5 – три возможности.



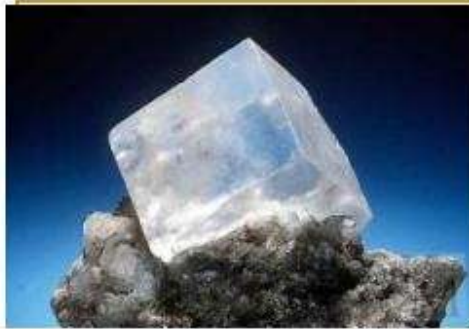
В вершине многогранника могут сходиться три, четыре или пять треугольников

- Для правильного четырёхугольника (квадрата), имеющего углы по 90° , получится неравенство $k \cdot 90^\circ < 360^\circ$, т.е. $k < 4$, и добавляется всего лишь одна возможность: $k = 3$ (в каждой вершине сходятся по три квадрата).
- Легко подсчитать, углы правильного пятиугольника равны по 108° , требование $k \cdot 108^\circ < 360^\circ$ даёт неравенство $k < 10/3$ и тоже единственную возможность $k = 3$, три пятиугольника в каждой вершине.
- Углы правильного шестиугольника равны по 120° , и даже три шестиугольника не могут образовать трёхгранный угол. То же относится и к правильным n -угольникам с любым $n > 6$ (их углы будут больше 120°).
- Вывод: Существует пять типов правильных многогранников: правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр

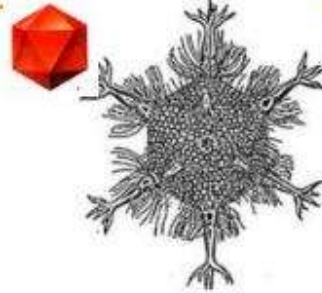
Правильные многогранники вокруг нас

Где возможно увидеть эти удивительные тела? В очень красивой книге немецкого биолога начала нашего века Э.Геккеля "Красота форм в природе" можно прочитать такие строки: "Природа вскармливает на своем лоне неисчерпаемое количество удивительных созданий, которые по красоте и разнообразию далеко превосходят все созданные искусством человека формы". Создания природы красивы и симметричны. Это неотделимое свойство природной гармонии.

Правильные многогранники в живой и неживой природе



Поваренная соль состоит из кристаллов в форме куба



Скелет одноклеточного организма феодарии представляет собой икосаэдр.



Молекулы воды имеют форму тетраэдра.



Кристаллы пирита имеют форму додекаэдра



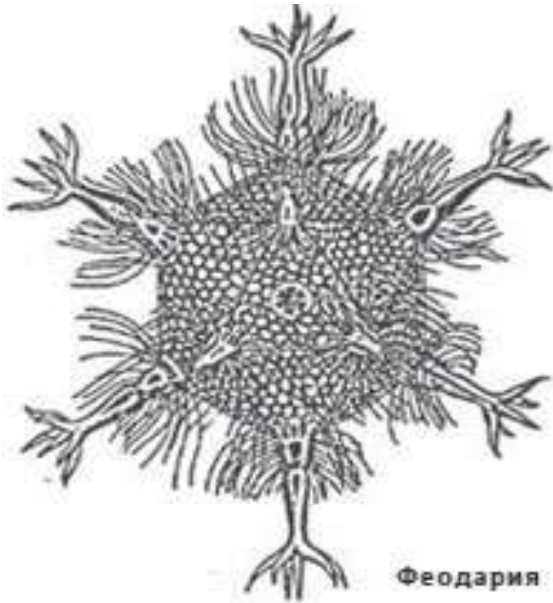
Минерал сильвин также имеет кристаллическую решетку в форме куба.



Минерал куприт образует кристаллы в форме октаэдров.



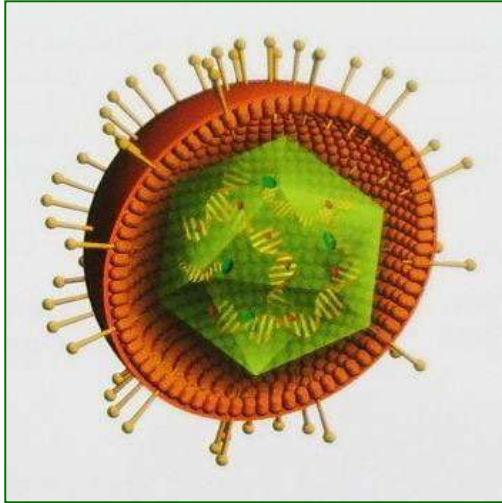
Простейшее животное



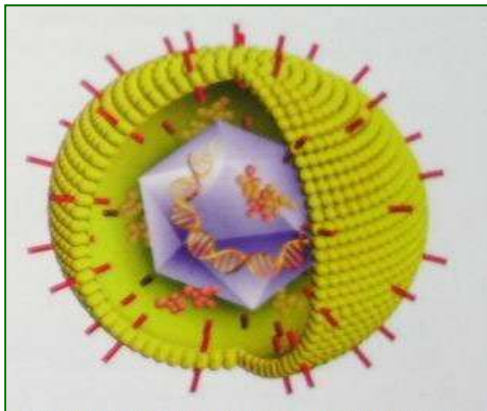
*Скелет одноклеточного организма феодарии (*Circogonia icosahedra*) по форме напоминает **икосаэдр**.*

Большинство феодарий живут на морской глубине и служат добычей коралловых рыбок. Но простейшее животное защищает себя двенадцатью иглами, выходящими из 12 вершин скелета. Он больше похоже на звёздчатый многогранник.

Чем же вызвана такая природная геометризация? Может быть, тем, что из всех многогранников с таким же количеством граней именно икосаэдр имеет наибольший объем и наименьшую площадь поверхности. Это геометрическое свойство помогает морскому микроорганизму преодолевать давление водной толщи.



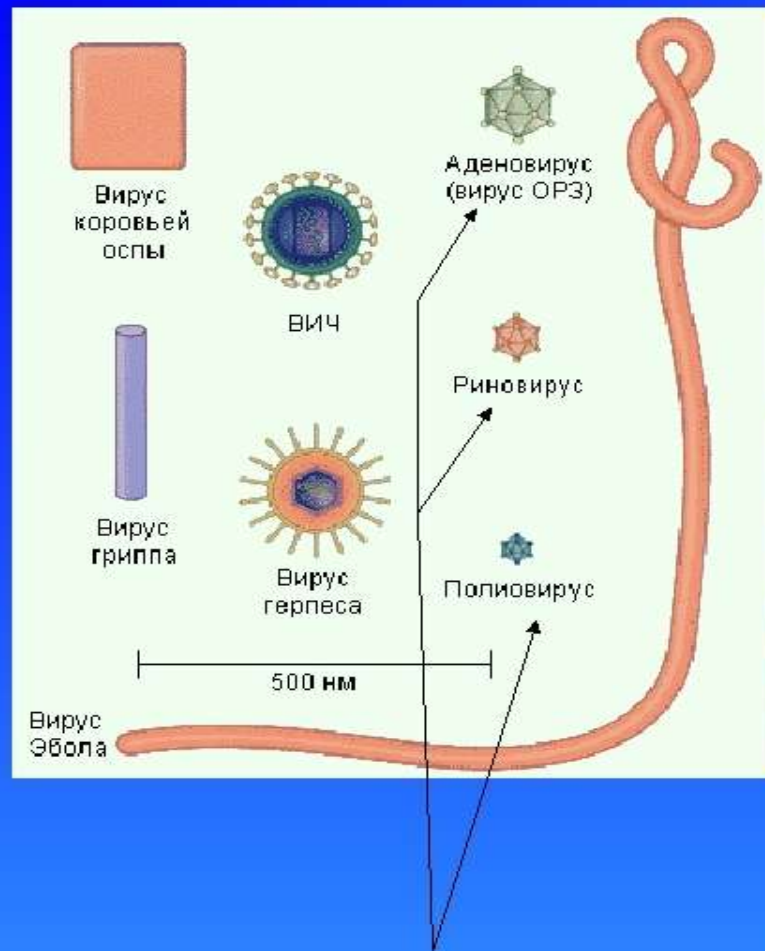
Вирус краснухи



Вирус
ветряной оспы

Икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов.

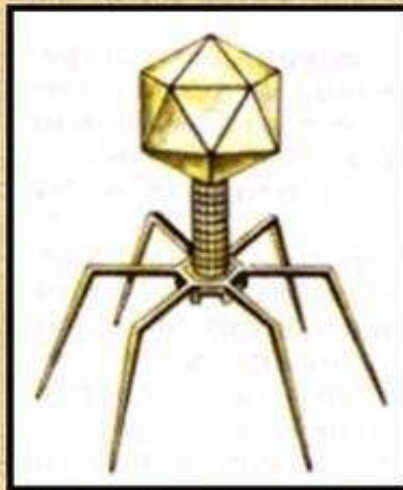
Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр.



Вирусам важно подчинить себе организм, в котором они паразитируют. Для этого требуется огромное наличие различных ферментов, однако размеры вируса ограничены. В таких условиях сформировалась икосаэдрическая форма, когда при наибольшем объёме имеется наименьшая площадь поверхности.

Примеры вирусов икосаэдрической формы.

У большей части вирусов, вызывающих болезни человека и животных, капсид почти всегда имеет форму икосаэдра – правильного двадцатигранника с двенадцатью вершинами и гранями из равносторонних треугольников.



Существуют вирусы и с более сложным строением. Некоторые фаги, помимо икосаэдрической головки, имеют полый цилиндрический отросток, окруженный чехлом из сократительных белков.

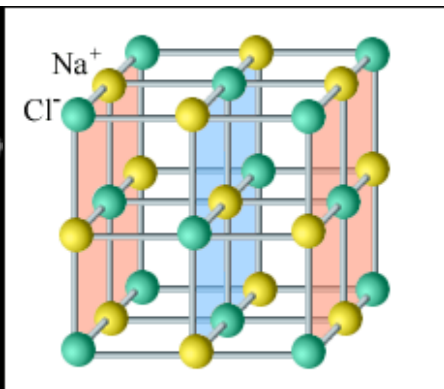
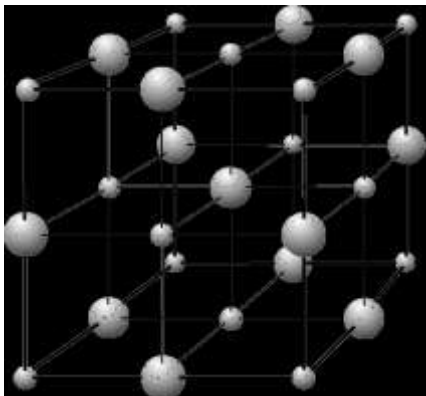
Чудо природы – кристаллы



- В кристаллических телах частицы располагаются в строгом порядке, образуя пространственные периодически повторяющиеся структуры во всем объеме тела. Для наглядного представления таких структур используются пространственные **кристаллические решетки**, в узлах которых располагаются центры атомов или молекул данного вещества. Чаще всего кристаллическая решетка строится из ионов (положительно и отрицательно заряженных) атомов, которые входят в состав молекулы данного вещества.

- Например, решетка поваренной соли содержит ионы Na^+ и Cl^- , не объединенные попарно в молекулы NaCl . Такие кристаллы называются **ионными**.

- Форму куба имеет монокристалл поваренной соли. **Поваренная соль** — пищевой продукт. Производится и используется после промышленной очистки минерала *галит*, известного также под названием «каменная соль».



Кристаллы некоторых знакомых нам веществ имеют форму правильных многогранников:

- *куб передает форму кристаллов поваренной соли NaCl*
- *монокристалл алюминиево-калиевых квасцов имеет форму октаэдра,*
- *кристалл сернистого колчедана FeS (пирита) имеет форму додекаэдра,*
- *сернокислый натрий - тетраэдр,*
- *бор - икосаэдр.*



*Алюминиевые квасцы имеют форму **октаэдра**. Это бесцветные кристаллы, хорошо растворимые в воде. Применяются при крашении тканей, дублении кожи, очистке воды, в медицине.*



Монокристалл пирита (сернистого колчедана) при подходящих условиях образует кристаллы, по форме близкие к додекаэдру.

Октаэдр

Форму октаэдра принимают кристаллы алмаза, куприта, а также алюминиево-калиевые кварцы, используемые при производстве алюминия.

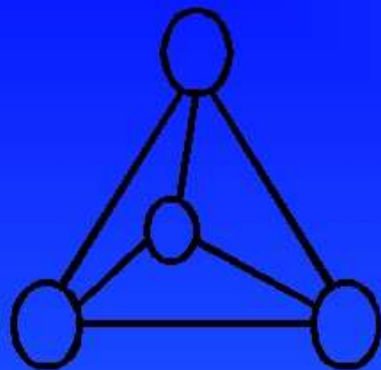
Куприт



Алмаз

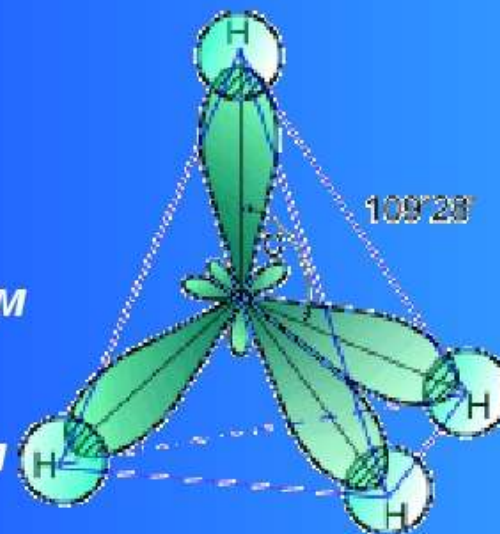


Тетраэдр.



Кристаллы белого фосфора образованы молекулами P_4 . Такая молекула имеет вид тетраэдра.

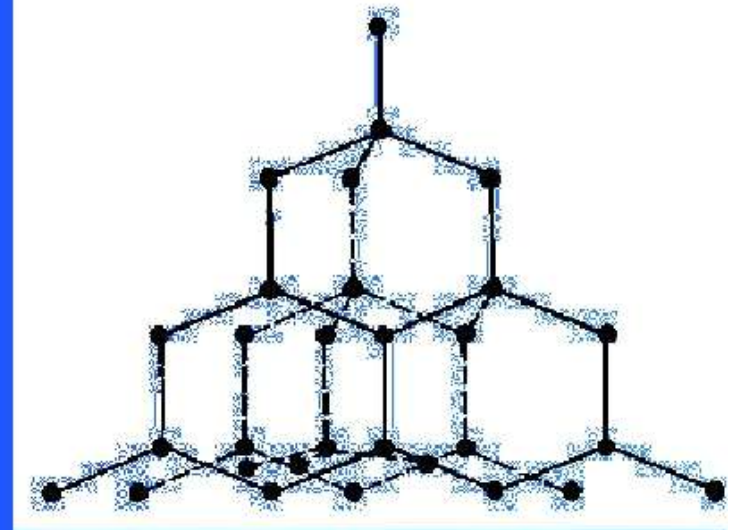
Кристаллическая решётка метана имеет форму тетраэдра. Метан горит бесцветным пламенем. С воздухом образует взрывоопасные смеси. Используется как топливо.



Молекулы зеркальных изомеров молочной кислоты также являются тетраэдрами.



Элементарная ячейка кристалла алмаза представляет собой тетраэдр, в центре и четырех вершинах которого расположены атомы углерода. Атомы, расположенные в вершинах тетраэдра, образуют центр нового тетраэдра и, таким образом, также окружены каждый еще четырьмя атомами и т.д. Все атомы углерода в кристаллической решетке расположены на одинаковом расстоянии (154 пм) друг от друга.



Строение решетки алмаза



Правильные многогранники и головоломки



Пирамидка Мефферта

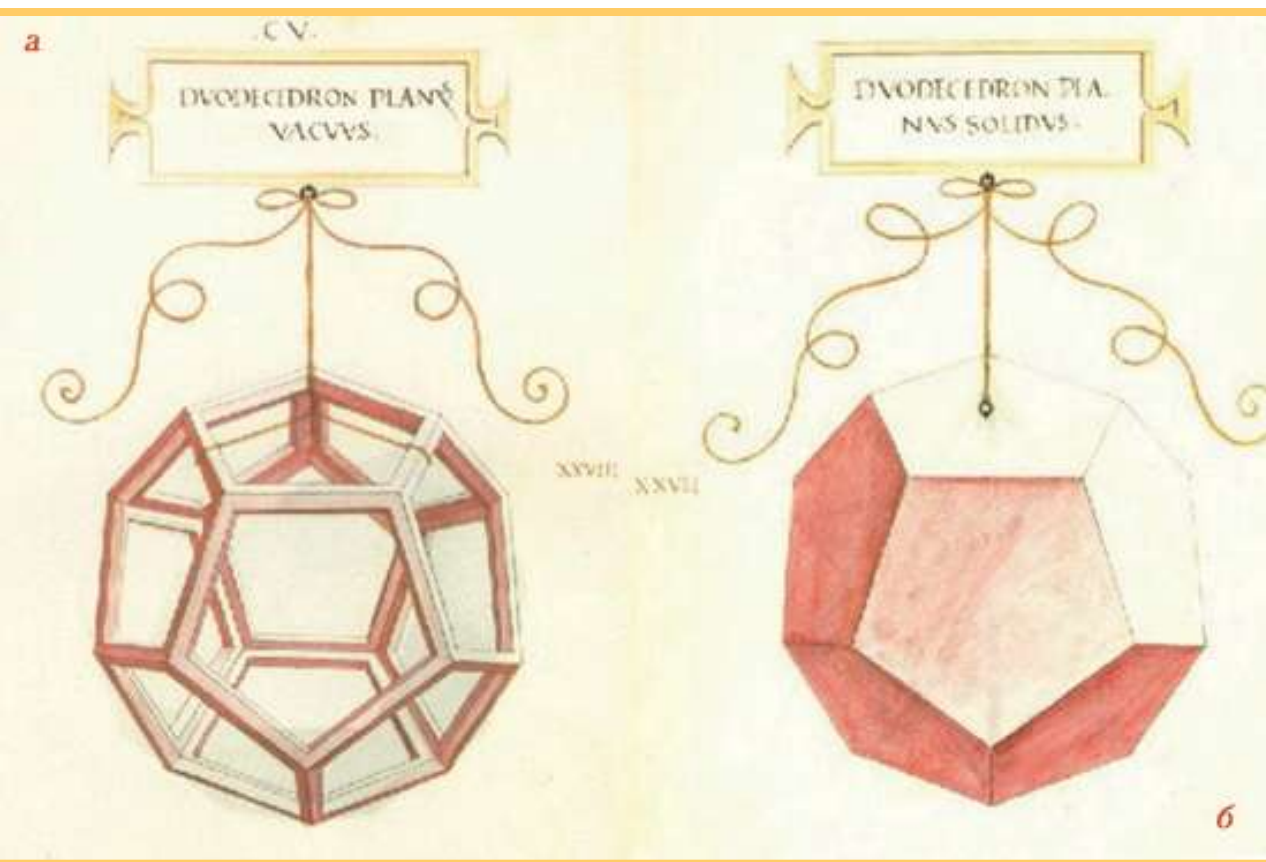
«Молдавская пирамидка» или «Японский тетраэдр» — головоломка в форме правильного тетраэдра, подобная кубику Рубика. Иногда за схожесть с кубическим аналогом называют также «Тетраэдр Рубика», хотя Эрнё Рубик не имеет никакого отношения к созданию этой головоломки. Изобретена и запатентована в 1972 году (до изобретения кубика Рубика) немцем Уве Меффертом.



Многогранники в искусстве

**«Поистине, живопись — наука и
законная дочь природы,
ибо она порождена природой»
(Леонардо да Винчи)**

Титан Возрождения, живописец, скульптор, ученый и изобретатель Леонардо да Винчи (1452-1519) — символ неразрывности искусства и науки, а следовательно, закономерен его интерес к таким прекрасным, высокосимметричным объектам, как выпуклые многогранники вообще и усеченный икосаэдр, в частности.



**Изображения
Леонардо да Винчи
додикаэдра методом
жестких ребер (а)
и методом
сплошных граней(б)**

На картине художника Сальвадора Дали «Тайная Вечеря» Христос со своими учениками изображён на фоне огромного прозрачного додекаэдра. Форму додекаэдра, по мнению древних, имела ВСЕЛЕННАЯ, т.е. они считали, что мы живём внутри свода, имеющего форму поверхности правильного додекаэдра.



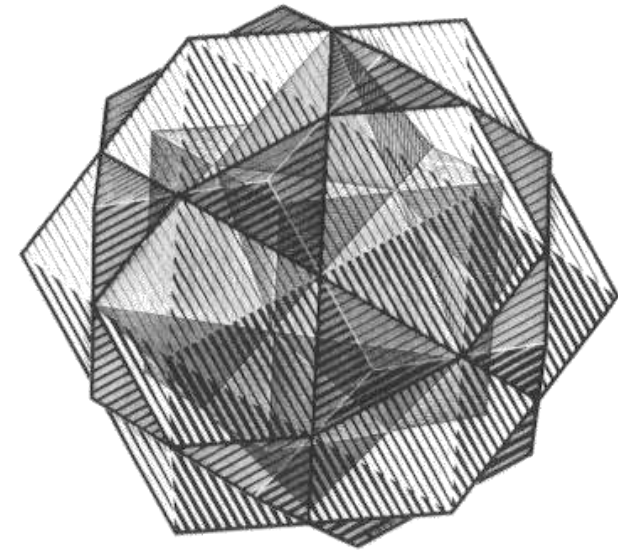
Альбрехт Дюрер.
В его известной гравюре
«Меланхолия»
на переднем плане
изображен додекаэдр.
А в 1525 году Дюрер написал
трактат, в котором
рассмотрел пять правильных
многогранников,
поверхности которых служат
хорошими моделями
перспективы.





Голландский художник **Мориц Корнилис Эшер** (1898-1972) создал уникальные и очаровательные работы, в которых использованы или показаны широкий круг математических идей.

Правильные геометрические тела - многогранники - имели особое очарование для Эшера. В его многих работах многогранники являются главной фигурой и в еще большем количестве работ они встречаются в качестве вспомогательных элементов.



На гравюре **"Четыре тела"** Эшер изобразил пересечение основных правильных многогранников, расположенных на одной оси симметрии, кроме этого, многогранники выглядят полупрозрачными, и сквозь любой из них можно увидеть остальные.



Изящный пример звездчатого додекаэдра можно найти в его работе "Порядок и хаос". В данном случае звездчатый многогранник помещен внутрь стеклянной сферы. Аскетичная красота этой конструкции контрастирует с беспорядочно разбросанным по столу мусором.

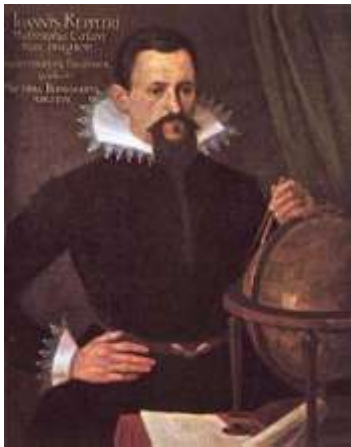
Наиболее интересная работа Эшера - гравюра "Звезды", на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров.

Если бы Эшер изобразил в данной работе лишь различные варианты многогранников, мы никогда бы не узнали о ней. Но он по какой-то причине поместил внутрь центральной фигуры хамелеонов, чтобы затруднить нам восприятие всей фигуры.

Таким образом нам необходимо отвлечься от привычного восприятия картины и попытаться взглянуть на нее свежим взором, чтобы представить ее целиком. Этот аспект данной картины является еще одним предметом восхищения математиков творчеством Эшера.



Космологическая гипотеза Кеплера

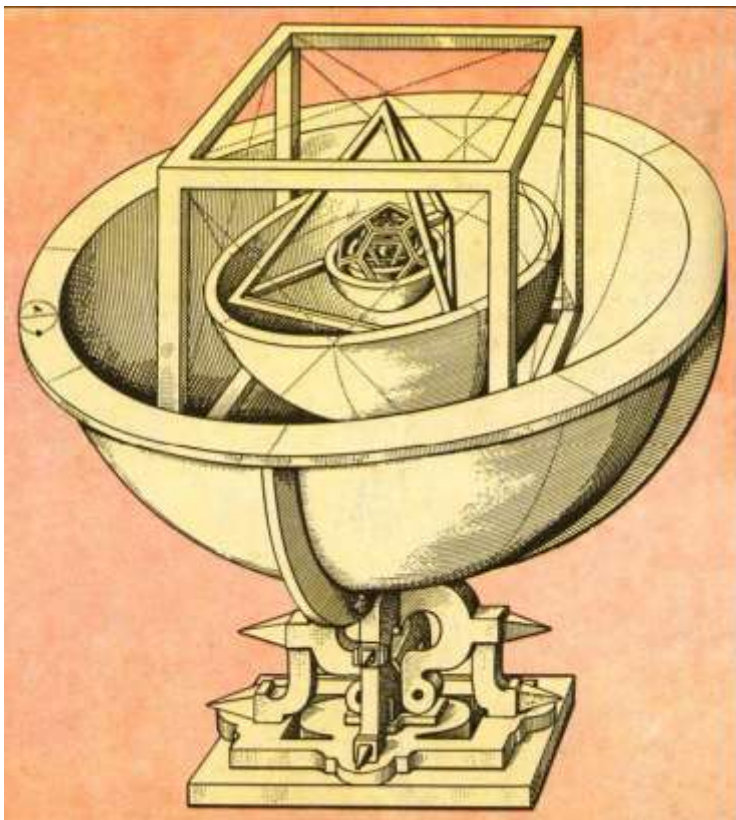


1571 – 1630 гг.

«Космический кубок» И. Кеплера

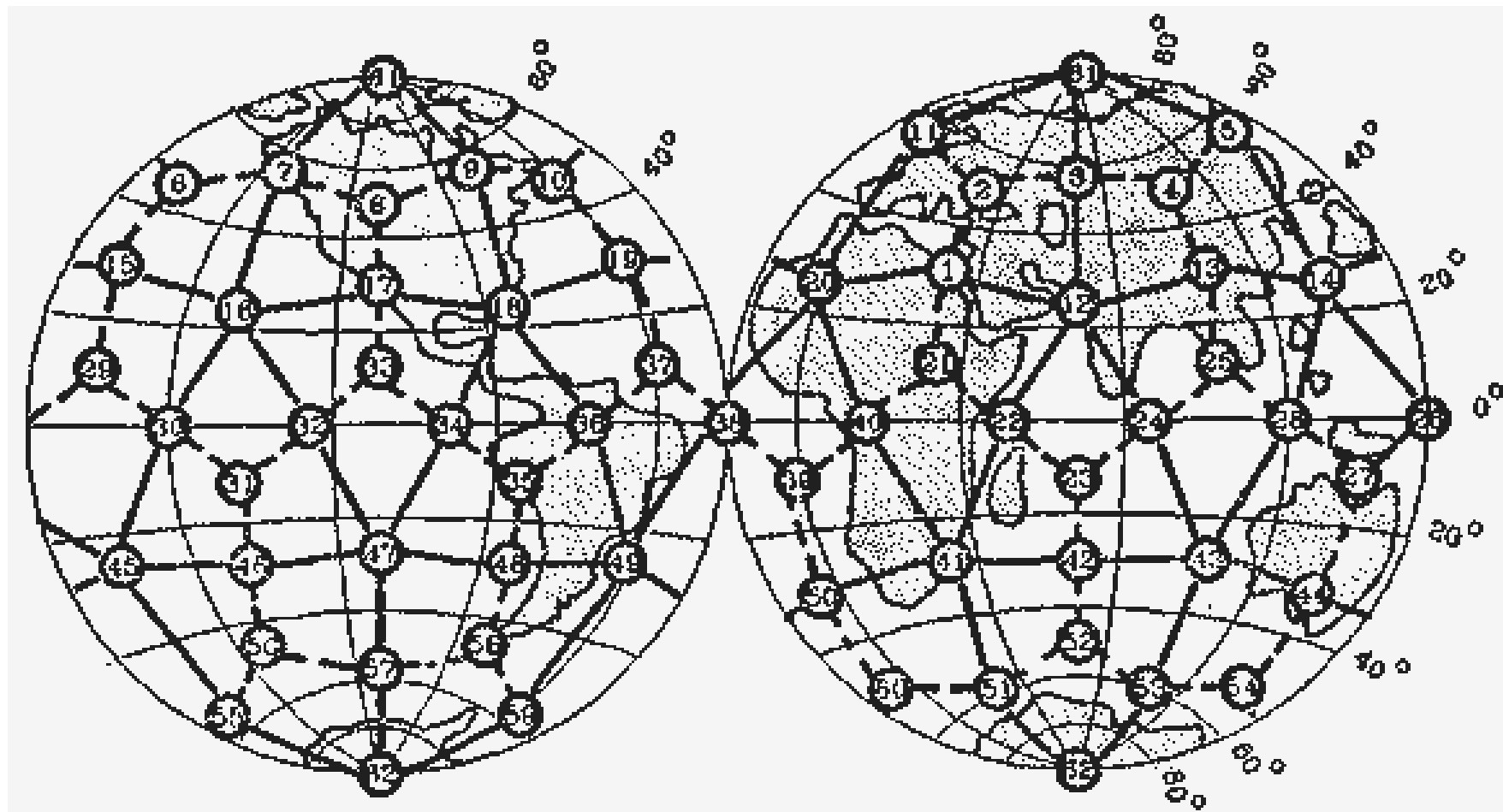
Кеплер попытался связать со свойствами правильных многогранников некоторые свойства Солнечной системы.

Он предположил, что расстояния между шестью известными тогда планетами выражаются через размеры пяти правильных выпуклых многогранников (Платоновых тел). Между каждой парой "небесных сфер", по которым, согласно этой гипотезе, вращаются планеты, Кеплер вписал одно из Платоновых тел. Вокруг сферы Меркурия, ближайшей к Солнцу планеты, описан **октаэдр**. Этот октаэдр вписан в сферу Венеры, вокруг которой описан **икосаэдр**. Вокруг икосаэдра описана сфера Земли, а вокруг этой сферы - **додекаэдр**. Додекаэдр вписан в сферу Марса, вокруг которой описан **тетраэдр**. Вокруг тетраэдра описана сфера Юпитера, вписанная в куб. Наконец, вокруг куба описана сфера Сатурна.



Идеи Пифагора, Платона, И.Кеплера о связи правильных многогранников с гармоничным устройством мира уже в наше время нашли свое продолжение в интересной научной гипотезе, авторами которой (в начале 80-х годов) явились московские инженеры В.Макаров и В.Морозов. Они считают, что ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обуславливают икосаэдро-додэкаэдрическую структуру Земли, проявляющуюся в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра. Их 62 вершины и середины ребер, называемых авторами узлами, обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления.

Икосаэдрово-додэкаэдровая сетка



Если нанести на глобус очаги наиболее крупных и примечательных культур и цивилизаций Древнего мира, можно заметить закономерность в их расположении относительно географических полюсов и экватора планеты. Многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль икосаэдрово-додекаэдровой сетки. Еще более удивительные вещи происходят в местах пересечения этих ребер: тут располагаются очаги древнейших культур и цивилизаций: Перу, Северная Монголия, Гаити, Обская культура и другие. В этих точках наблюдаются максимумы и минимумы атмосферного давления, гигантские завихрения Мирового океана, здесь шотландское озеро Лох-Несс, Бермудский треугольник. Дальнейшие исследования Земли, возможно, определят отношение к этой красивой научной гипотезе, в которой, как видно, правильные многогранники занимают важное место.

- Математика, в частности, геометрия, представляет собой могущественный инструмент познания природы, создания техники и преобразования мира.
- Различные геометрические формы находят своё отражение в живой и неживой природе и практически во всех отраслях знаний.



Интернет ресурсы:

<http://www.nips.riss-telecom.ru/poly/>

Мир многогранников

<http://www.sch57.msk.ru:8101/collect/smogl.htm>

История математики

<http://mschool.kubsu.ru/>

Библиотека электронных учебных пособий

<http://www.ega-math.narod.ru/>

Статьи по математике

<http://dondublon.chat.ru/math.htm>

Популярная математика

<http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/index.htm>

«В мире науки»

<http://www.mccme.ru/>

Московский центр непрерывного математического образования

<http://mathc.chat.ru/>

Математический калейдоскоп