10. Понятие логарифма

Решим графически уравнение $3^x = 8$ (три в степени икс равно восьми), для этого в одной системе координат построим два графика функции y=8 и y=3^x (Рис 1). Составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

Чертеж показывает, что уравнение имеет один корень, но точного значения указать нельзя. В связи с этим в математике был введен новый символ log_a – логарифм по основанию а. Используя данный символ, можно записать корень уравнения x=$\log_3 8$ (икс равен логарифму восьми по основанию три).

Сейчас для любого уравнения вида $a^x = b$, где $a > 0$ и $b > 0$, $a \neq 1$, $x = \log_a b$ (а в степени икс равняется бэ, где а и бэ — положительные числа и а неравно единице, существует единственный корень — икс равен логарифм числа бэ по основанию а).

Дадим определение понятия логарифма: логарифмом положительного числа **b** (бэ) по положительному и отличному от единицы основанию **a** называют показатель степени, в которую нужно возвести число а, чтобы получить число b (бэ).

Например: $\log_3 27 = 3$, так как $3^3 = 27$ (логарифм двадцати семи по основанию три равен трем, так как три в кубе равно двадцати семи).

$\log_2\left(\frac{1}{64}\right) = -6$, так как $2^{-6} = \frac{1}{64}$ (логарифм одной шестьдесят четвертой по основанию два равен минус шесть, так как два в минус шестой степени равно одной шестьдесят четвертой).

$\log_{\frac{1}{9}} 81 = -2$, так как $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = 81$ (логарифм восьмидесяти одного по основанию одной девятой равен минус два, так как одна девятая в минус второй степени равна восьмидесяти одному).

$\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$, так как $16^{\frac{1}{2}} = 4$ (логарифм четырех по основанию шестнадцати равен одной второй, так как шестнадцать в степени одна вторая равно четырем).

Выделим и обоснуем три формулы:

1.$\log_a a = 1$, так как $a^1 = a$ (логарифм числа а по основанию а равен единице, так как любое число в первой степени равно самому себе). Значит, $\log_5 5 = 1$.

2.$\log_a 1 = 0$, так как $a^0 = 1$ (логарифм единицы по основанию а равен нулю, так как любое число в нулевой степени равно единице). Таким образом, $\log_3 1 = 0$.

3. $\log_a a^m = m$, так как $a^m = a^m$ (логарифм числа а в степени эм по основанию а равен эм, так как а в степени эм равняется а в степени эм). Следовательно, $\log_7 7^4 = 4$.

Рассмотрим $\log_3 8$. Так как точного рационального значения $\log_3 8$ (логарифма восьми по основанию три) мы указать не можем, то такие числа принято называть иррациональными.
Обоснуем это:
Пусть $\log_3 8$ – рациональное число, тогда его можно представить в виде дроби эм, деленное на эн, где эм и эн — натуральные числа: $\log_3 8 = \frac{m}{n}$.
Тогда, применив определение логарифма и свойство степени, получим (три в степени эм равно восьми в степени эн), но этого быть не может, так как три в степени эм – целое число, кратное трем, а восемь в степени эн – целое число кратное двум

$3^{\frac{m}{n}} = 8,$

$\left(3^{\frac{m}{n}}\right)^n = 8^n, 3^m = 8^n.$

Получили противоречие нашему утверждению, значит
$\log_3 8 -$ иррациональное число.
Посмотрите и запомните, как на математическом языке выглядит определение логарифма: $a^{\log_a b} = b$ (а в степени логарифм числа бэ по основанию а равно бэ)
Например: $4^{\log_4 5} = 5, \quad 0{,}2^{\log_{0,2} 7} = 7, \quad 13^{\log_{13} 56} = 56$
Другими словами, если основание степени и основание логарифма, стоящего в степени, равны, то значение выражения равно подлогарифмическому числу.
Действие по нахождению логарифма числа называют логарифмированием. Оно является обратным к действию возведения в степень с соответствующим основанием:

Как прочитать диктору	Возведение в степень	Логарифмирование
Шесть в квадрате равно тридцати шести, а логарифм тридцати шести по основанию шесть равен двум	$6^2 = 36$	$\log_6 36 = 2$
Десять в четвертой степени равно десяти тысячам, а логарифм десяти тысяч по основанию десять равен четырем	$10^4 = 10000$	$\log_{10} 10000 = 4$
Ноль целых две десятые в пятой степени равно ноль целых тридцать две сто тысячные, а логарифм ноль	$0{,}2^5 = 0{,}00032$	$\log_{0,2} 0{,}00032 = 5$

целых тридцати двух сто тысячных по основанию ноль целые две десятые равен пяти		

Рассмотрим вычисление значения логарифма.
Пример1: Вычислите $\log_{\frac{1}{15}}\left(225\sqrt[3]{15}\right)$ (логарифм числа двести двадцать пять корней кубических из пятнадцати по основанию одна пятнадцатая)
Обозначим данное выражение через икс $\log_{\frac{1}{15}}\left(225\sqrt[3]{15}\right) = x$ (логарифм числа двести двадцать пять корней кубических из пятнадцати по основанию одна пятнадцатая)
Применим определение логарифма и получим $\left(\frac{1}{15}\right)^{x}$=$225\sqrt[3]{15}$ (одна пятнадцатая в степени икс равно двести двадцать пять корней кубических из пятнадцати).
Решим полученное показательное уравнение.
приведя обе части уравнения к основанию пятнадцать получим:
$15^{-x} = 15^{2} \cdot 15^{\frac{1}{3}}$
воспользуемся свойством степени (при умножении показатели складываются)
$15^{-x} = 15^{2\frac{1}{3}}$
значит, $-x = \frac{7}{3}$ (т.к. $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$)
получим ответ: икс равен минус семь третьих $x = -\frac{7}{3}$.
Пример 2: Вычислите $\log_{0,5}\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (логарифм дроби единица, деленная на четыре корня квадратных из двух, по основанию ноль целых пять десятых)

Вводим обозначение логарифм дроби единица, деленная на четыре корня квадратных из двух, по основанию ноль целых пять десятых равно игрек	$\log_{0,5}\frac{1}{4\sqrt{2}} = y$
По определению логарифма ноль целых пять десятых в степени игрек равно дроби единица, деленная на четыре корня квадратных из двух	$0,5^{y} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$
Приведем к одному основанию Одна вторая в степени игрек равно одной второй в степени пять вторых	$\left(\frac{1}{2}\right)^{y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

Перейдем к степени	y=2,5

Математики для логарифма по основанию 10 ввели новое обозначение $\log_{10} x = \lg x$ и назвали логарифм по основанию десять десятичным логарифмом. Вместо $\log_{10}$ принято использовать символ $\lg$. Так вместо $\log_{10} 1000$

пишут $lg1000$,т.е.

$\log_{10} 1000 = lg1000$