

Двугранный угол

В планиметрии основными объектами являются прямые, отрезки, лучи и точки. Лучи исходящие из одной точки, образуют одну их геометрических фигур – угол.

Мы знаем, что линейный угол измеряется в градусах и радианах.

В стереометрии к объектам добавляется плоскость. Фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , не принадлежащими одной плоскости в геометрии называется двугранным углом. Полуплоскости – это грани двугранного угла. Прямая a – это ребро двугранного угла.

Двухгранный угол как и линейный угол можно назвать, измерить, построить. Это и предстоит нам выяснить в этом уроке.

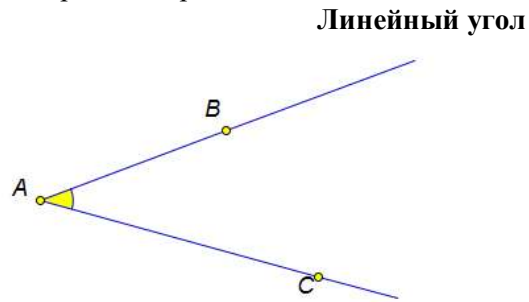
Найдём двухгранный угол на модели тетраэдра ABCD.

Двугранный угол с ребром AB называют CABD, где C и D точки принадлежащие разным граням угла а ребро AB называют в середине

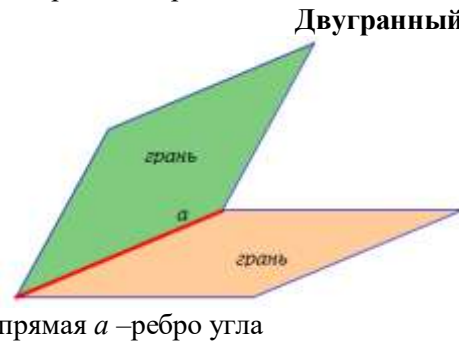
Вокруг нас достаточно много предметов с элементами в виде двугранного угла.

Во многих городах в парках установлены специальные скамейки для примирения. Скамейка выполнена в виде двух сходящихся к центру наклонных плоскостей.

На экране изображение

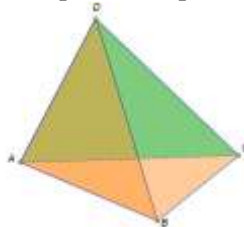


На экране изображение и текст

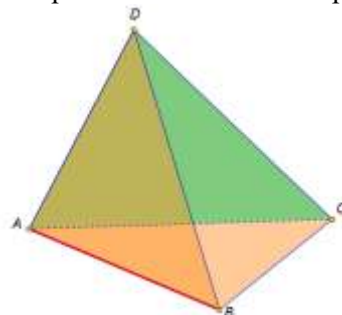


Фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , не принадлежащие одной плоскости.

На экране изображение



На экране обновляется изображение и текст



CABD– двугранный угол.

Обозначение CABD,
AB– ребро, $C \in ABC$, $D \in ACD$

На экране изображение



На экране изображение

При строительстве домов часто используется так называемая двухскатная крыша. На этом доме крыша выполнена в виде двугранного угла в 90 градусов.

Двугранный угол тоже измеряется в градусах или радианах, но как его измерить.

Интересно заметить, что крыши домов лежат на стропилах. А обрешётка стропил образует два ската крыши под заданным углом.

Перенесем изображение на чертёж. На чертеже для нахождения двугранного угла на его ребре отчается точка В. Из этой точки проводятся два луча ВА и ВС перпендикулярно ребру угла. Образованный этими лучами угол АВС называется линейным углом двугранного угла.

Градусная мера двугранного угла равна градусной мере его линейного угла.

Измерим угол АОВ.
Градусная мера данного двугранного угла равна шестидесяти градусам.

Линейных углов для двугранного угла можно провести бесконечное количество, важно знать, что все они равны.
Рассмотрим два линейных угла АОВ и $A_1O_1B_1$. Лучи ОА и O_1A_1 лежат в одной грани и перпендикулярны к прямой OO_1 , поэтому они сонаправлены. Лучи ОВ и O_1B_1 так же сонаправлены. Поэтому угол АОВ равен углу $A_1O_1B_1$ как углы с сонаправленными сторонами.

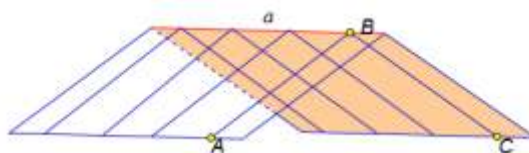
Так двугранный угол характеризуется линейным углом, а линейные углы



На экране изображение



На экране изображение



текст

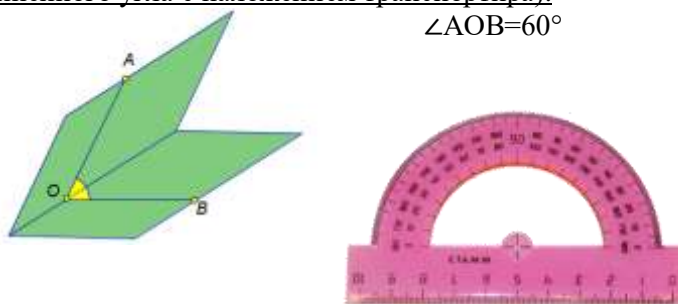
$\angle ABC$ – линейный угол, $AB \perp a$, $BC \perp a$

текст

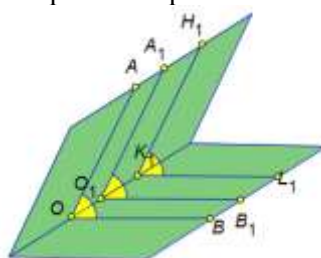
Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

На экране появляется анимацию по измерению градусной меры линейного угла с наложением транспортира):

$\angle AOB = 60^\circ$



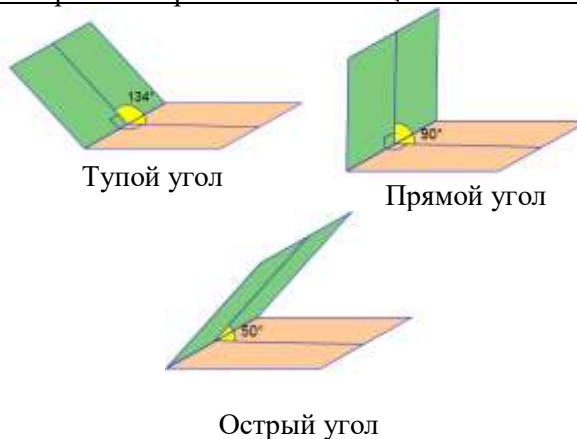
На экране изображение с анимацией элементов.



$\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ линейные углы,
ОА и O_1A_1 , ОВ и O_1B_1 – сонаправлены
 $\Rightarrow \angle AOB = \angle A_1O_1B_1$

бывают острые, тупые и прямые. Рассмотрим модели двугранных углов. Тупой угол, если его линейный угол от 90 до 180 градусов. Прямой угол, если его линейный угол равен 90 градусов. Острый угол, если его линейный угол от 0 до 90 градусов.

На экране изображение с анимацией появления.

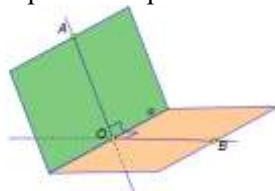


Докажем одно из важных свойств линейного угла. Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла.

На экране тест
Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла.

Пусть угол АОВ – линейный угол данного двугранного угла. По построению лучи АО и ОВ перпендикулярны прямой а.

На экране изображение и доказательство:



Доказательство:
1) $AO, OB \perp a$ (по построению)

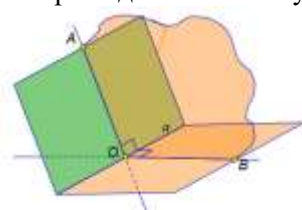
Через две пересекающиеся прямые АО и ОВ проходит плоскость АОВ по теореме: Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

На экране добавляется пункт доказательства:

2) $AO \cap OB \Rightarrow AOB$ единственная

Прямая а перпендикулярна двум пересекающимся прямым лежащим в этой плоскости, значит по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая а перпендикулярна плоскости АОВ.

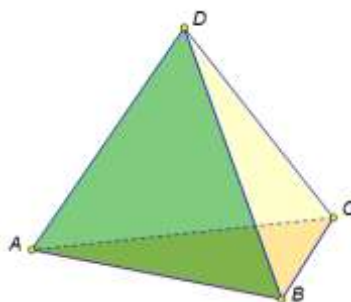
На экране добавляется пункт доказательства и чертёж



3) $\begin{cases} a \perp OA \\ a \perp OB \\ OA, OB \subset (AOB) \\ OA \cap OB \end{cases} \xrightarrow{\text{по признаку}} a \perp (AOB)$

Для решения задач важно уметь строить линейный угол заданного двугранного угла. Построить линейный угол двугранного угла с ребром АВ для тетраэдра ABCD. Речь идет о двугранном угле, который образован, во-первых, ребром АВ, одной гранью ABD, второй гранью ABC.

На экране изображение с анимацией элементов:



Вот один из способов построения. Проведем перпендикуляр из точки D к

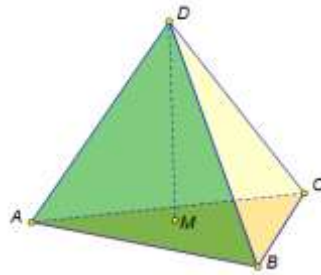
На экране изображение и текст:

плоскости ABC, Отметим точку M основание перпендикуляра. Вспомним, что в тетраэдре основание перпендикуляра совпадает с центром вписанной окружности в основании тетраэдра.

Проведем наклонную из точки D перпендикулярно к ребру AB, отметим точку N основание наклонной.

В треугольнике DMN отрезок NM будет проекций наклонной DN на плоскость ABC. По теореме о трёх перпендикулярах ребро AB будет перпендикулярно проекции NM.

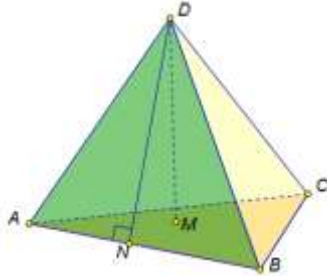
Значит стороны угла DNM перпендикулярны к ребру AB, значит построенный угол DNM искомым линейный угол.



Построение:
1) $DM: DM \perp (ABC)$

На экране обновляется чертёж и текст:

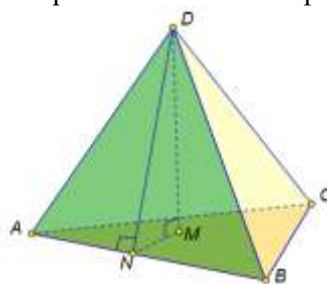
2) $DN: DN \perp AB$



На экране обновляется чертёж и построения:

3) В $\triangle DMN$:

$DM \perp NM, AB \perp DN \xrightarrow{\text{по ГПП}} AB \perp NM$



На экране добавляется пункт построения:

4) $\begin{cases} AB \perp NM \\ DN \perp AB \end{cases} \xrightarrow{\text{по опр}} \angle DNM - \text{линейный}$
(AB – ребро)

Рассмотрим пример решения задачи на вычисление двугранного угла.

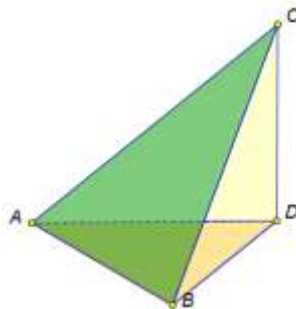
Задача

Равнобедренный треугольник ABC и правильный треугольник ADB не лежат в одной плоскости. Отрезок CD является перпендикуляром к плоскости ADB. Найдите двугранный угол DABC, если $AC=CB=2\sqrt{5}$ см, $AB=4$ см.

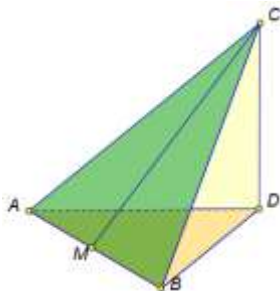
Двугранный угол DABC равен его линейному углу. Построим этот угол.

Проведем наклонную CM перпендикулярно к ребру AB, так как треугольник ACB равнобедренный, то точка M совпадёт с серединой ребра AB.

На экране текст задачи и изображение:



изображение:



Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный, $\triangle ADB$ правильный не лежат в одной плоскости, $CD \perp ADB$.
 $AC=CB=2\sqrt{5}$ см, $AB=4$ см

Найти: угол DABC,

Решение :

1) Проведем CM: $CM \perp AB, AM=MB$ (по свойству р/б треу-ка)

На экране изображение и текст решения:

Прямая CD по условию перпендикулярна плоскости ADB , значит перпендикулярна прямой DM лежащей в этой плоскости. А отрезок MD является проекцией наклонной CM на плоскость ADB .

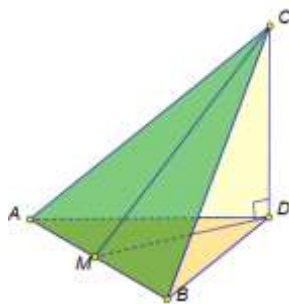
Прямая AB перпендикулярна наклонной CM по построению, значит по теореме о трех перпендикулярах перпендикулярна проекции MD .

Итак к ребру AB найдены два перпендикуляра CM и DM . Значит они образуют линейный угол CMD двугранного угла $DABC$. И нам останется его найти из прямоугольного треугольника CDM .

Так отрезок CM медиана и высота равнобедренного треугольника ACB , то по теореме Пифагора катет CM равен 4 см.

Из прямоугольного треугольника DMB по теореме Пифагора катет DM равен двум корням из трёх.

Косинус угла CMD из прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета MD к гипотенузе CM и равен три корня из трёх на два. Значит угол CMD равен 30 градусам.

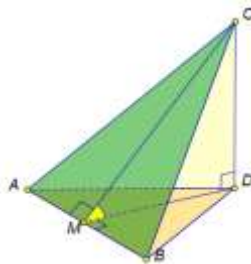


2) $CD \perp (ADB)$
 $\Rightarrow CD \perp MD \Rightarrow \triangle CDM$ – прямоугольный,
 и MD -проекция CM

На экране добавляется пункт решения и отметки прямых углов:

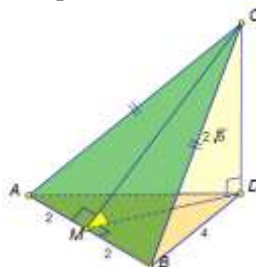
3) $AB \perp CM$, где CM – наклонная, а MD -проекция $\xrightarrow{\text{по ТТП}} AB \perp MD$.

На экране обновляется чертёж и текст решения:



Решение:
 1) $\begin{cases} CM \perp AB \\ DM \perp AB \end{cases} \xrightarrow{\text{по опр.}} \angle CMD$ –
 AB -ребро
 искомый линейный угол.

На экране обновляется чертёж и текст решения:



Решение:
 2) $\triangle CMB$ – прям. $\xrightarrow{\text{по т.Пифагора}}$
 $CM = \sqrt{CB^2 - MB^2} = \sqrt{20 - 4} = \sqrt{16} = 4$
 см.

На экране добавляется пункт решения:

3) $\triangle DMB$ –
 прям. $\xrightarrow{\text{по т.Пифагора}} DM = \sqrt{DB^2 - MB^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ см.

На экране добавляется пункт решения:

4) $\triangle CDM$ – прям. $\xrightarrow{\text{по опр.}} \cos \angle CMD = \frac{MD}{CM} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle CMD = 30^\circ$
 Ответ: 30°